

MÄNGUDE MATEMAATIKA

Sissejuhatus mänguteooriasse

Evald Übi



Retsensent Ants Aasma
Toimetaja Helve Hennoste
Kunstnik Piia Maiste
Küljendaja Erje Hakman

www.argokirjastus.ee

© Autor ja kirjastus Argo, 2021

ISBN 978-9949-688-72-2

Trükitud trükikojas Paar

SISUKORD

SISSEJUHATUS	7
I. MÄNGUD JA TRIKID	9
1.1 Mängimine ja õppimine	9
1.2. Sissejuhatus mänguteooriasse	10
1.3. Lineaarse planeerimise ülesande koostamine ja graafiline lahendamine	15
1.4. Nullsummalised maatriksmängud ja Nashi tasakaalustrateegia	19
1.5. Maatriksmängu taandamine lineaarseks planeerimisülesandeks	24
1.6. Bimaatriksmängud	30
1.7. Kooperatiivsed mängud	35
1.8. Hääletamismängud ja Shapley-Shubiku jõuindeks	42
1.9. Parima kandidaadi määramine Hare reegli järgi	43
1.10. Mängu tuum	44
1.11. Mängu lahendamine domineerivate strateegiate abil	45
1.12. Mänguteooria ülesanded	47
1.13. Mänguteooria ülesannete vastused	50
1.14. Mänguteooria ajaloost	51
1.15. Trikid	53
1.16. Trikkide selgitused	58
II. MATEMAATIKA	61
2.1. Algarvud	61
2.2. Kaks tähtsat arvu π ja e	63
2.3. Ülesanded algarvude ja arvude omaduste kohta	65
2.4. Algarvude ja arvude omaduste ülesannete vastused	67

2.5. Matemaatikaülesanded	68
2.6. Matemaatikaülesannete vastused	71
III. MATEMAATIKA JA MÄNGUTEORIA RAKENDUSED	75
3.1. Liikluse reguleerimine mänguteoria abil	75
3.2. Lihtsalt lahenduvad ülesanded	78
3.3. Lihtsalt lahendatud ülesannete vastused	80
3.4. Otsustamine riski korral	81
3.5. Õiglane jaotamine	85
3.6. Õiglase jaotamise vastused	89
3.7. Kalenderplaneerimine	90
3.8. Võrkplaneerimine	93
IV. NUPUTAMISÜLESANDED MITMEST VALLAST	97
V. LÕBUSAD ÜLESANDED	103
LISA 1. TÕENÄOSUSTEORIA	108
LISA 2. READ	114
(L)ÕPETUSEKS	117
KIRJANDUS	118

*Me ei lõpeta mängimist sellepärast, et jääme vanemaks,
me jääme vanaks sellepärast,
et lõpetame mängimise.*

G. B. SHAW

SISSEJUHATUS

„Mäng, mäng, mäng, see on väikese inimese töö ...“ laulab Ivo Linna. Aga mängivad ka suured inimesed. Jalgpalli maailmameistrivõistluste finaali on sadu miljoneid täiskasvanud kui ka lapsi haarav etendus, parimad mängijad oleksid nagu üliinimesed. Selles raamatus ei räägi me siiski laste mängudest ega täiskasvanute spordivõistlustest, vaid matemaatilise taustaga otsustamisülesannetest. Peale mängude on matemaatika, füüsika ja igapäevaelu nuputamisülesandeid.

Mänguteooria on konfliktsituatsioonide uurimise matemaatiline teooria. Selle esimesed rakendused olid seotud ajaviitemängudega, sellest ka nimetus mänguteooria. Maailmas on ilmunud mänguteooria kohta kümneid raamatuid, kus ajaviitemängud on vaid kõrvalteema. Selles raamatus pole mänguteooria süstemaatilist esitust, vaid on toodud mitukümmend lõpuni lahendatud mängu, nagu näiteks „Morra“ ja „Kivi-paber-käärid“, milles peetakse maailmameistrivõistlusi. Seda ja teisi näiteid saavad nii täiskasvanud kui ka lapsed mängida kahekesi, tutvudes samal ajal nii mängu- kui ka tõenäosusteooria põhimõistetega, mida mõistavad täielikult vaid matemaatikahuvilised. Mängida võivad aga kõik, kes täidavad mängu reegleid. Peale mänguteooria osa läbivõtmist võivad asjahuvilised hakata lugema tõsisemaid ja põhjalikumaid mänguteooriat tutvustavaid töid.

Matemaatika sai alguse tuhandeid aastaid tagasi, kuid tõsisem mänguteooria on vaid sajandivanune, kui mitte arvestada mõnd erandit. Mänguteoorial on ühisosa matemaatika, majandusteaduse ja statistikaga. Klassikalist matemaatikat rakendatakse põhiliselt materiaalse väärtuse tootmisel: tehnikas, füüsikas, keemias jm. Mänguteooriat kasutatakse väärtuste jaotamisel majanduses, poliitika kujundamisel, sotsioloogias, sõja-asjanduses, meditsiinis, tänavaliikluse reguleerimisel, tehnoloogilistes automatiseeritud süsteemides jm. Ka paljud matemaatika rakendused humanitaarteadustes on seotud mänguteooriaga.

Raamatu esimeses osas on kirjeldatud mitut matemaatilise ja majandusliku sisuga mängu ja esitatud nende lahendused. Raskemad ülesanded iseseisvaks lahendamiseks on märgitud tärniga. Me ei käsitle selles raamatus tulistamise ja võitlemisega seotud arvutimänge ega propageeri neid. „Minecraft“ ja „Call of Duty“ võivad küll meeldida ja aidata sisustada aega rongis või bussis, aga jalgrattaga sõitmine, ujumine, suusatamine ning pallimängud on palju kasulikumad. Kui spordiga on piisavalt tegeldud, saab mängusoovi rahuldada selles raamatus kirjeldatud arendavate mängude abil. Esimese osa lõpus on trikitamise

ja nuputamisega seotud mängu ning ülesandeid. Vastustes on piisavad selgitused, millest suurem osa peaks olema arusaadavad ka põhiharidusega lugejale.

Teine osa on mõeldud eelkõige matemaatikahuvilistele, kes kavatsevad valmistuda olümpiaadiks, valida matemaatika või füüsika eriala kõrgkoolis. Selles antakse ülevaade arvuteooria ajaloost ja uusimatest saavutustest ning käsitletakse ka matemaatiliste konstantide arvutamist. Nii see kui ka kolmas osa sisaldavad mitmesuguse raskusastmega ülesandeid koos vastustega. Osa ülesandeid on koostanud autor, kes on terve elu õpetanud matemaatikat, teine osa on mõne varem tuntud ülesande lihtsustatud variant või vastupidi: mõni tuntud ülesanne on tehtud natuke raskemaks. Osa ülesandeid on varem esitatud mitmes raamatus ja nende tegelik autor pole teada. Samuti on lisatud internetist võetud näiteid.

Kolmandas osas on kirjeldatud matemaatika ja mänguteooria rakendusi tänavaliikluse korraldamisel, riski korral otsustamisel ja õiglasel jaotamisel. Veel on vaadeldud praktilise majandustegevusega seotud probleeme: võrk- ja kalenderplaneerimist.

Neljandas osas on füüsika, mehaanika ja astronoomia nuputamisülesanded, viiendas natuke lõbusamad probleemid eri valdkondadest.

Lisades on lühidalt tutvustatud tõenäosusteooria, matemaatilise statistika ja ridade teooria põhimõisteid, mida kasutatakse mänguteooria ülesannete lahendamisel.

Meie gümnaasiumis ei õpetata mänguteooriat. Kõnealust lünka peaks täitma see raamat, kus on esimest korda kirjeldatud mänguteooriat, otsustamisteooriat, õiglast jaotamist, lineaarse planeerimise ülesande koostamist ja graafilist lahendamist, kalenderplaneerimist ja võrkplaneerimist. Siit raamatust leiavad mänguteooria elementaarseid teadmisi nii need, keda huvitavad matemaatika ja füüsika, kui ka tulevased majandusjuhid. On ju Nobeli majandusauhinna saanud üheksa teadlast mänguteooriaga seotud tööde eest.

Autor tänab retsenti Ants Aasmad ja kolleege, kes asjalike märkustega aitasid käsikirja paremaks muuta.

I

MÄNGUD

1.1. Mängimine ja õppimine

ET SEEDIDA TEADMISI, PEAVAD NEED OLEMA ISUGA NEELATUD.

Mäng selle sõna igapäevases tähenduses on omane nii inimestele kui ka loomadele, eriti noores eas. Erinevalt väärtusi loovast tööst mängitakse ajaviiteks, igavuse peletamiseks, õppimiseks, sportlike tulemuste saavutamiseks jne. Juba antiikajast on mängu eesmärk olnud tunnustuse, autasu või vaimsete ja kehaliste oskuste omandamine lastel. Aga miks ikkagi täiskasvanud mängivad? Kõige olulisem põhjus on see, et mängud ühendavad inimesi, muudavad seltskondliku tegevuse meeldivaks. Kirjandusest võib leida mängu erinevaid definitsioone, toome neist siin ühe: „Mäng on süsteem, kus mängijad on hõivatud reeglitega piiritletud kunstlikus konfliktis, mis viib mõõdetava tulemuseni“ (Dignan, 2011).

Sarnaselt teiste valdkondadega on digiajastul muutunud mängude sisu ja vorm ning tekkinud mängutööstus, nagu seda nimetatakse. Mitmesugused videomängud, kliendikaardid, punktisüsteemid, aunimetused jms suurendavad koostööd, muudavad meie kogemused värvikamaks ja laiendavad valikuvõimalusi. Sajandeid tagasi suunati lapsed õppima selliste nüride vahenditega nagu piits ja präänik, uued mänguviisid aga annavad lisavõimalusi, kuid tekitavad ka uusi ohte. On ju mängutööstusel palju rohkem raha ja võimalusi kui vaestel haridusasutustel. Arvuti abil saab kiirendada arvutama ja lugema õppimist, kui nende oskuste omandamise stimuleerimiseks kasutatakse punkte. Aga edaspidi võib juhtuda, et laps ei soovigi iseseisvalt ilma stiimulita õppida. Eesmärgiks võib saada punktide või muu tasu saamine. Lugemiseks või arvutamiseks tuleb leida sellised raamatud või ülesanded, mis arendaks loovat mõtlemist.

Lasteaias on kõige tähtsam „õppeaine“ sotsialiseerumine, seal õpib laps suhtlema omaealistega, eriti siis, kui ta on varem olnud palju koos vanavanematega. Ideaalis peaks lasteaias tekkima sõprade seltskonnad, kellel on ühised huvid, näiteks tehnika, sport, muusika. Parem sada sõpra kui sada eurot, nii võiks tänapäevase sõnastada tuntud ütluse. Vanemate ja kasvatajate ülesanne on tutvustada lastele erinevaid tegevusvaldkondi ja erialasid. Hea on seda teha mõistatuste ja vanasõnade abil, sest lapsepõlves kuulnud tõed ja seisukohad jäävad meelde kogu eluks.



Murdeas väheneb vanemate tähtsus ja lapsed soovivad kuuluda mingisse rühma, saavutada mingi positsiooni, näiteks automarkide tundmises või spordis, osaleda mõnes treeningurühmas. Siis on oluline, et vanemad tunneksid ja teaksid oma lapse sõpru, saaksid neid koos oma lastega mõnel alal juhendada. Digiajastul on murdealisel võimalik saada infot pea-aegu kõigi huvitavate küsimuste kohta Google'i abil. Kui pole teavet eesti keeles, siis saavad vanemad õpetada tõlkeprogrammide kasutamist. Lapsevanemate jaoks on väga oluline mitte kaotada sidet ja usalduslikku suhet oma lapsega,

olla lapsele alati toeks, kui tal on raske. Ideaalne oleks leida selline hobi, mis oleks seotud tulevase elukutsega. Siis võib loota, et temast saab oma eriala pühendunud spetsialist. Paljud edukad inimesed ongi vanemate eeskujul valinud nende eriala, kui vanematel on õnnestunud tekitada lapses huvi selle vastu. Kahtlemata on võimalik ka vastupidine variant: vanema aktiivse selgitustöö tõttu valib laps talle sobimatu eriala, millest loobub mõne aasta pärast.

1.2. Sissejuhatuse mänguteooriasse

KUI EI SAA, MIDA SOOVID, SIIS SOOVI, MIDA SAAD.

Mitme eluvaldkonda iseloomustab huvide konflikt. Nii on see majanduses, sõjanduses, poliitikas, sotsioloogias jm. Osaleja edu sõltub mitte ainult tema otsusest, vaid olulisel määral ka sellest, mida teevad teised. Näiteks kauba müüja kasum oleneb nii tema määratud hinnast kui ka sellest, kui palju kaupa ostetakse. Suures linnas autoga sõites oleneb meie liikumiskiirus ja ohutus teiste liiklejate käitumisest.

Konfliktsituatsiooniks nimetatakse olukorda, kui lõpptulemus sõltub vähemalt kahe erineva huviga osaleja tegevusest. **Mänguteooria** uurib täpseid meetodeid kasutades otsuste tegemist määramatuse või konfliktsituatsiooni korral. Tinglikult võib määramatuse olukorras pidada üheks osalejaks loodust, mille seisundist sõltub oluliselt teiste osalejate tulemus. Loodusel endal pole mingit eesmärki, selle seisundid muutuvad juhuslikult ega sõltu inimese tahtest.

Raamatu autor pole seadnud eesmärgiks esitada süstemaatilist mänguteooriat. Kõiki põistusi ja mõisteid selgitatakse lihtsate näidete abil, mis peaksid olema arusaadavad ka kesise matemaatilise tasemega lugejatele, kes on huvitatud eelkõige arendavatest mängudest ja praktilistest rakendustest. Vaja on vaid tõenäosusteooria, matemaatilise statistika ja ridade teooria elementaarseid teadmisi. Need on esitatud raamatu lõpus. Teooriat on raamatus minimaalselt, selle asemel aga on palju lõpuni lahendatud näiteid. Mängude osa lõpeb ülesannete ja vastustega, nende hulgas on ka Parrondo paradoks.

Kõige rohkem on uuritud kahe isiku mängu, kuid üldjuhul võib olla ka mitu mängijat. Mängu kirjeldus peab määrama osalejate hulga, nende kõikvõimalike tegutsemisviiside (strateegiate) loetelu, käikude järjekorra ja nende tulemused arvnäitajate kujul. Loomulikult eeldatakse, et igal mängijal on eesmärk (maksimeerida võitu või juhusliku sündmuse tõenäosust, minimeerida toiminguks vajalikku aega jne). Käik on ühe strateegia valimine mängu reeglitega määratud variantide hulgast. Mängijad võivad moodustada ühiste huvidega rühmasid – **koalitsioone**. Selliseid mängu nimetatakse **kooperatiivseteks**. Alljärgnevalt on toodud kuus näidet mängude kohta, nendest kolmas, neljas ja viies on kooperatiivsed mängud.

Näide 1. Vanaema ja lapselaps

Lapselaps on teinud pahandust ja vanaema tahab teda karistada.

Ringikujulise tiigi raadius $R = 4$ m ja algmomendil on lapselaps selle keskel ning vanaema veepiiril. Poiss suudab ujuda kiirusega 1 m/sek, kuival maal on tema maksimaalne kiirus 5 m/sek, vanaemal 4 m/sek. Vanaema võidab mängu, kui ta püüab poisi kinni veest väljumisel. Vastasel korral võidab poiss, kui ta jõuab tiigist välja enne vanaema kohale jõudmist ja pääseb kiiresti joostes. Lahendame selle jälitamismängu.

Kui poiss ujub piki ringi raadiust vanaemast eemale, siis jõuab ta kaldale 4 sekundiga, aga vanaema läbib selle ajaga mööda veepiiri (ringjoont) 16 m, mis on suurem kui poolringjoone ligikaudne pikkus $12,56 \approx \pi R$. Poiss saab õpetust, sest sel juhul vanaema võidab.



Selle ülesande lahendamiseks võrdleme esmalt vanaema ja poisi nurkkiirust, kui poiss ujub mööda kaldajoonega kontsentrilist ringjoont raadiusega üks meeter. Need nurkkiirused on võrdsed, sest joonkiiruste suhe võrdub raadiuste suhtega. Ülesande lahendamiseks oletame, et poiss ujub mööda ringjoont, mille raadius on 0,9 m. Sel juhul on poisi nurkkiirus suurem kui vanaemal ja ta saab võtta sellel ringjoonel kõige kaugema asendi vanaema suhtes, kui tema, ringi keskpunkt ja vanaema asuvad ühel sirgel. Sellest asendist hakkab poiss ujuma vanaemast eemale. Kaldale jõudmiseks kulub tal 3,1 sekundit. Selle ajaga jõuab vanaema läbida $4 \times 3,1 = 12,4 \text{ m} < 12,56 \text{ m}$ (poolringjoone ligikaudne pikkus). Poisil õnnestub põgeneda, ta on võitja.

Näide 2. Raha jaotamine

Tuleb jaotada 100 eurot kahe soovija vahel, kes tahavad oma osa maksimeerida ja teatavad oma soovist korraga. Tuleb leida mittenegatiivsed täisarvud x_1, x_2 , sellised, et $x_1 + x_2 = 100$ kusjuures tuleb lähtuda tingimustest:

- 1) kui $x_1 + x_2 \leq 100$, siis saavad mõlemad mängijad soovitud osad;
- 2) kui $x_1 + x_2 > 100$ siis
 - a) kui $x_1 \neq x_2$, siis väiksemat osa soovinu saab selle, teine saab ülejäägi $100 - x_i$
 - b) kui $x_1 = x_2$, siis $x_1 = x_2 = 50$

Näitame et $x_1=51$ on mõlema mängija jaoks optimaalne strateegia. Kui teine mängija soovib saada rohkem, siis teise reegli järgi saab esimene mängija 51. Nii on see ka juhul, kui teine soovib 49 või veel vähem. Kui ka teise soov on 51, siis punkti 2b järgi saavad mõlemad 50 eurot. Seega, sõltumata teisest mängijast, valides, $x_1 = 51$, saab mängija vähemalt 50 eurot.

Näide 3. Orkester

Ööklubi omanik maksab 1000 dollarit lauljale, pianistile ja trummarile nende ühisesinemise eest ööklubis. Laulja ja pianisti esinemist hindab ta 800 dollariga, trummari ja pianisti esinemist 650 ja ainult pianisti esinemist 300 dollariga. Artistide koosesinemiste ülejäänud variante ei pea ta võimalikuks. Lauljast ja trummarist duett teeniks mujal õhtuga 500 dollarit, laulja üks esinedes 200 dollarit. Trummar üks ei saa esineda. Milline on „õiglane“ summaarse teenistuse (1000 dollari) jaotus mängijate vahel, kui arvestada nende osalise koopeerumise võimalusi?

Kui näiteks trummar ja pianist esinevad kahekesi mujal ning laulja eraldi, saavad nad kõik kokku 850 ($650 + 200$) dollarit. Ka teiste eraldi esinemise variantide korral on summaarne tulu väiksem kui ühisesinemisel saadav 1000 dollarit.

Punktis 1.7 on probleemi lahendamise ühe võimaliku püstitusena toodud selle **kooperatiivse mängu N-tuum**, mille kohaselt on laulja, pianisti ja trummari teenistus vastavalt 333,3; 483,3; 183,3. Loomulikult pole selline jaotus „absoluutselt õiglane“, vaid on ülesande lahendamise üks võimalus kokkuleppeliste reeglite ja eeskirjade järgi.

Näide 4. Demokraatlik hääletamine

Firma juhatuse liikmete arv n on paaritu, $3 \leq n$. Kõik küsimused otsustatakse hääletenamusega. Iga liikme osatähtsus ehk „võit“ on $x_i = 1/n$, võitude summa võrdub ühega.

Näide 5. Juhikeskne hääletamine

Firma juhatuse liikmete arv on $n = 5$. Otsus võetakse vastu, kui selle poolt on juht ja vähemalt üks juhatuse lihtliige või juhatuse kõik ülejäänud liikmed. Osalejate tugevuse ehk võidu saab selles kooperatiivses mängus määrata N -tuuma abil, see on vektor $x = (3/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7)$, mille komponentide summa võrdub ühega. Juhatuse ülejäänud liikmed on kolm korda „nõrgemad“ kui juht.

Näide 6. Maatriksmäng „Operatsioon või medikamendid“

Patsiendil on tõenäosusega 0,8 haigus Ha või tõenäosusega 0,2 haigus Hb. Arst peab otsustama, kas kasutada esimest strateegiat: teha operatsioon, või teist: anda medikamente. Haiguse Ha korral paraneb patsient kindlasti pärast operatsiooni (tõenäosus 1), haiguse Hb korral patsient sureb operatsiooni tagajärjel. Kui arst otsustab piirduda medikamentidega, siis haiguse Ha tagajärjel patsient sureb, Hb korral paraneb kindlasti (tõenäosus 1). Ülesande tingimusi saab kirjeldada tabeli abil, mida nimetatakse mängumaatriksiks. Selle elemendid võrduvad paranemise tõenäosustega.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Arsti esimesele strateegiale (teha operatsioon) vastab maatriksi esimene rida, medikamentide andmisele teine rida. Looduse esimene strateegia on haigus Ha, sellele vastab esimene veerg, teisele veerule haigus Hb. Operatsiooni korral võrdub keskmine paranemistõenäosus $1 \times 0,8 + 0 \times 0,2 = 0,8$, medikamentide kasutamisel on see tõenäosus $0 \times 0,8 + 1 \times 0,2 = 0,2$. Need suurused on arvutatud lisas 1 toodud valemite abil. Seega peab arst tegema operatsiooni.

Kirjeldatud probleemi lahendamismeetodi puudus seisneb selles, et tegelikult pole täpselt teada erinevate haiguste esinemise tõenäosusi, neid võib arst ainult hinnata oma kogemuste põhjal. Kui haiguste esinemise tõenäosuse kohta pole infot, on tegemist määramatu olukorraga. Seega saab koostada mänguteooria ülesande, mille järgi määrata arsti optimaalne strateegia selles maatriksmängus: tal tuleb teha nii operatsioon kui ka anda medikamente tõenäosusega 0,5, siis on niisuguse probleemi korduval lahendamisel surmajuhtumite keskmine arv minimaalne. Seega otsustab arst kulli-kirja visates, kas teha operatsioon või anda medikamente. Ülesande selline püstitus on mõistlik loodusõnnetuse või epideemia korral, kui on palju patsiente.

Esitatud eripalgelistest näidetest selgub selliste probleemide keerukus. Kahtlemata on raskem osa ülesande korrektne püstitamine, see oleneb eelkõige tegutsemise eesmärgist. Esimeses näites soovis vanaema kinni püüda lapselapse, kellel oli vastupidine eesmärk.

Teises näites raha jaotamine kahele soovijale, kolmandas kõige vähem rahuldatud esinejate koosluse maksimaalne rahulolu, viimases näites patsiendi terveks ravimine.

Edasi vaatleme lühidalt mänguteooria seost teiste teadusharudega ja selle rakendamise võimalusi. Väärtuste loomine ja nende jaotamine on kaks probleemi, mida peavad inimesed lahendama igas riigis igasuguse riigikorra ajal. Kuidas luua rohkem väärtusi ja muuta elu paremaks, kasutades kohalikke loodusvarasid ja rahvusvahelist koostööd? Kuidas jaotada ühistegevuse kulutusi ja tulu? Nende kolme probleemi eduka lahendamise põhjal saab otsustada ühiskonna arengutaseme üle. Hüvede ja kulude jaotamise süsteem peab lahendama kõige tähtsama küsimuse: kuidas inimeste piiramatud soovid viia kokku piiratud ressursidega? Poliitikud otsustavad kõige tähtsamate ühiskonnaelu probleemide lahendamise, nemad kehtestavad mängureeglid.

Nimetatud probleeme saab edukalt lahendada teadussaavutusi kasutades. Reaal- ja tehnikateadused võimaldavad luua hüvesid uusimate masinate ja tehnoloogia abil, annavad inimestele nüüdisaegsed side- ja transpordivõimalused, kindlustavad meditsiinitehnika arengu. Humanitaarteadused tegelevad põhiliselt mitte hüvede loomise, vaid nende jaotamisega. Majandusteadus, sotsioloogia, politoloogia, sotsiaalne psühholoogia jt teadused uurivad ühiskondlike protsesside korraldamist. Need teadused aitavad reguleerida ühiskonna arengut, vähendada elanike rühmade pingeid, kehtestada enamuse aktsepteeritav elukorraldus jne.

Matemaatikal kui ühel vanemal teadusharul on oluline osa füüsika, keemia ja tehnika-teaduste arengus. Kuid viimastel sajanditel kasutatakse seda sagedamini ka humanitaarteadustes, matemaatika on kui paljude eluvaldkondade juhtimise täiustamise formaalne vahend. Selleks koostatakse asjaomase protsessi matemaatiline mudel, mida uuritakse nüüdisaegse arvutustehnika vahendite abil.

Inimeste suhtlust reguleerivad moraal, kompromiss ja kokkulepped, mis on iseloomulikud ainult inimühiskonnale. Eluta looduses ja loomade vahel kokkuleppeid ei ole. Demokraatlikes riikides reguleerivad moraal ja õiglusel põhinevad seadused suhtlemist, enamik inimesi aktsepteerib neid. Diktatuuri korral pole see nii, seetõttu on seadused ja elukorraldus kehtestatud kitsa võimul oleva rühma huvides ja elu reguleeritakse suure repressiiv-aparaadi abil. Täielik demokraatia on eesmärk, mille poole tuleb liikuda, sest pole ju täielikku demokraatiat üheski riigis.

Üksikisikute ja elanike rühmade kokkulepped peavad rajanema õiglusel. Selle mõiste rakendamiseks on sajandite jooksul välja mõeldud mitmesuguseid printsiipe. Kaks tähtsat on **võrdsuse (egalitaarsuse) ja efektiivsuse printsiip**. Äärmuslik võrdsus on näiteks üldine vaesus, see on kõige halvem variant. Et pinged ühiskonnas ei ületaks kriitilist piiri, tuleb paljude otsuste tegemisel arvestada eelkõige vaesemate elanike huve, püüda vähendada valikuvõimaluste erinevust. Selleks tuleb muuta vaesemate elanike olukord talutavamaks, jagada toodetud hüvesid ümber, mitte aga tappa rikkaid nagu Venemaal tehti sada aastat tagasi. Alles üldise rikkuse lisandumisel saavad võimalikuks ka edukamate ja vähem edukate suuremad erinevused. Hüvede õiglaseks jaotamiseks kasutatakse mänguteooriat.

Egalitaarsuse vastand on **utilitaarsus**, egoismile rajatud individualistlik suund ühiskonna korraldamisel. Selle kohaselt peaks iga indiviidi eesmärk olema individuaalse heaolu saavutamine, seeläbi ka kogu ühiskonna summaarse heaolu maksimeerimine. Utilitarismi seisukohalt on tulude ümberjaotamine teisejärguline. Matemaatika ei anna vastust küsimusele, kas „õiglasem“ on utilitaarne või egalitaarne printsiip. Matemaatikud vaid selgitavad nende printsiipide omadusi ja teevad nendest järeldusi, näitavad, et mõlemad võivad olenevalt konkreetsest olukorrast anda nii mõistlikke kui ka absurdseid tulemusi.

1.3. Lineaarse planeerimise ülesande koostamine ja graafiline lahendamine

Nii maatriksmänge kui ka kooperatiivseid mängu lahendatakse lineaarse planeerimise abil, seetõttu tutvume lühidalt nende ülesannete koostamise ja lahendamisega.

Näide 1

Ettevõtte valmistab kaht liiki tooteid, saades ühe ühiku eest kasumit vastavalt 300 ja 500 eurot. Kasutatakse kolme masinat A, B ja C, nende töötundide arv kuus on vastavalt 170, 150 ja 180. Koostada tuleb selline tööplaan, mille korral summaarne kasum G on maksimaalne. Tähistame otsustusmuutujatega x_1 ja x_2 planeeritavad toodete kogused ja koostame lineaarse planeerimise ülesande

$$G = 300x_1 + 500x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 170 \text{ (masin A, esimene)}$$

$$x_1 + x_2 \leq 150 \text{ (masin B, teine)}$$

$$3x_2 \leq 180 \text{ (masin C, kolmas)}$$

$$0 \leq x.$$

Masinat A kasutatakse ühe ühiku esimest ja teist liiki toodete valmistamisel vastavalt 1 ja 2 tundi, masinat B vastavalt 1 ja 1 tundi ning masinat C vaid teist liiki toote valmistamisel, 3 tundi ühiku kohta. Need arvud on võrratuste vasakute poolte kordajad. Suurendame avaldist

$$G = 300x_1 + 500x_2,$$

mida nimetatakse **sihifunktsiooniks**. Seega seisneb lineaarse planeerimise ülesanne kõiki võrratusi üheaegselt rahuldava tasapinnapunkti $x = (x_1, x_2)$ leidmises, mille korral lineaarne funktsioon G saavutab maksimumi. Kõiki kitsendusi üheaegselt rahuldavate punktide x hulka nimetatakse **lubatavate lahendite hulgaks**. Selle määramiseks joonistame esmalt esimese sirge $x_1 + 2x_2 = 170$, mis lõikab koordinaattelgi vastavalt $x_1 = 170$ ja $x_2 = 85$ korral. Koordinaatide alguspunkt $(0, 0)$ rahuldab esimest võrratust, seega on kõnealune kitsendus täidetud esimesest sirgest vasakul ja allpool. Sarnaselt joonistame ka teise ja kolmanda sirge. Tavaliselt on lineaarse planeerimise ülesannetes muutujate mittenegatiivsuse nõue, see on täidetud esimeses veerandis. Kõik võrratused on üheaegselt täidetud lubatavate